ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Решения задач

11.1. Да, в качестве членов арифметической прогрессии рассмотрим члены данной последовательности, имеющие вид: $a_k = \frac{k}{2022!}$, где k = 1; 2; 3; … 2022. Разность d данной прогрессии будет равна $\frac{1}{2022!}$.

Ответ: да.

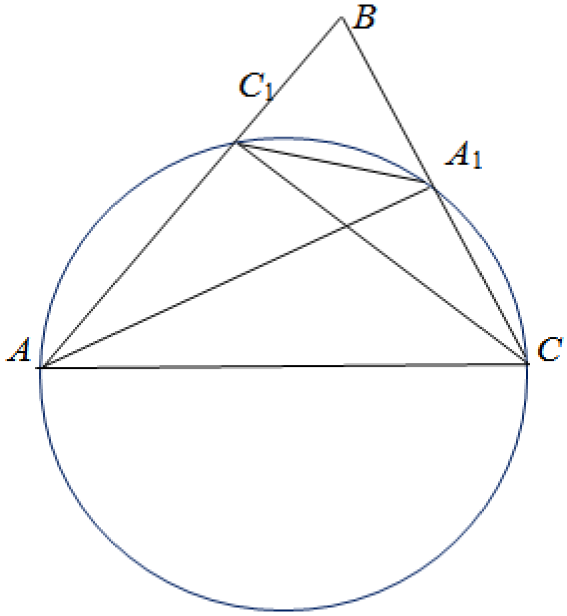
11.2. Обозначим $\sqrt{x-1} = a, \sqrt{y-4} = b$. Тогда x = $a^2 + 1, y = b^2 + 4$.

После подстановки этих выражений в исходное уравнение получим

Уравнение: a +2b = =$\frac{(a^2+1)+(b^2+4)}{2}$. Последнее же уравнение преобразуется к виду $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 0$, откуда $a = 1$, $b = 2$. Тогда $x = 2$, $y = 8$.

Ответ: $x = 2$, $y = 8$.

11.3.



Так как CC_1 – высота треугольника ABC и точка C_1 лежит на окружности, то $\angle AC_1C = 90°$, поэтому AC– диаметр. $\angle AA_1C$ - вписанный и опирается на диаметр, поэтому $\angle AA_1C = 90°$. Таким образом, $\angle AC_1C = \angle AA_1C$.

AA_1 - медиана, поэтому $BA_1 = CA_1$. Но AA_1 и высота треугольника ABC. А если в треугольнике отрезок является высотой и медианой, то этот треугольник является равнобедренным, то есть треугольник ABC - равнобедренный.

Рассмотрим треугольник BCC_1, он является прямоугольным и $BA_1 = CA_1$, поэтому C_1A_1 является медианой, а значит, $C_1A_1 = BA_1 = CA_1 = 2$ см. Поэтому $BC = 4$ см.

Рассмотрим треугольники ABA_1 и CBC_1. В этих треугольниках $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90°$ и $\angle ABC$ – общий. Поэтому данные треугольники подобны по двум углам. Тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{AA_1}{CC_1} = \frac{3}{2}$. Отсюда находим $AB = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ (см) $= AC$. По теореме Герона находим площадь искомого треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Так как $p = \frac{6+6+4}{2} = 8$ (см), то $S = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$ (см^2).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см^2.

11.4. Обозначим $tgx + \sqrt{2} = n$, $ctgx + \sqrt{2} = m$, где n и m – целые числа. Тогда $tgx = n - \sqrt{2}$, $ctgx = m - \sqrt{2}$. Учитывая, что $tgx \cdot ctgx = 1$, получим: $(n - \sqrt{2}) \cdot (m - \sqrt{2}) = 1$. Откуда $(n+m) \cdot \sqrt{2} = nm + 1$. Число $\sqrt{2}$ является иррациональным, поэтому это равенство возможно, когда $n + m = 0, nm + 1 = 0$.

Найдем целые n и m, удовлетворяющие данному условию: $\begin{cases} m = -n, \\ 1 - n^2 = 0. \end{cases}$

Решением данной системы уравнений будут следующие пары чисел: $n = 1$, $m = -1$ и $n = -1$, $m = 1$. Значит, такое x существует, и в качестве его можно указать, например, $x = arctg(1 - \sqrt{2})$.

Ответ: существует.

11.5. Данная фигура содержит $9^2 - 4 \cdot 3 = 69$ клеток. На рис. 2 показано, как садовник может посадить 60 яблонь. Докажем, что более 60 яблонь посадить нельзя.

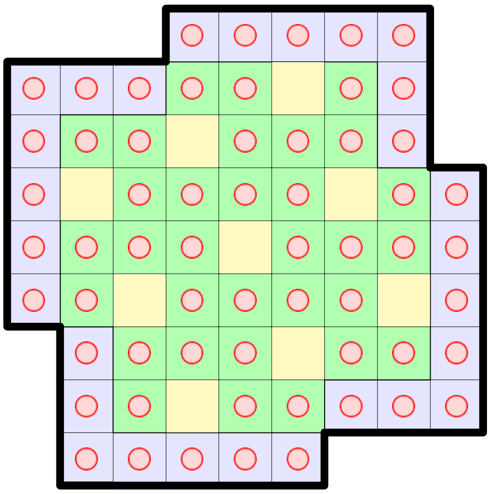


Рис. 2

Сразу заметим, что на 28 синих клетках яблони точно посадить можно (эти клетки получают свет через забор). Остается 41 клетка. Пусть x – количество пустых из этих клеток («световые окна», которые изображены желтым цветом на рис. 2). Получается, что $41 - x$ яблонь должны быть освещены через x световых окон. Но каждое световое окно дает свет не более чем четырем яблоням. Поэтому мы приходим к неравенству

$41 - x \geq 4x$, решением которого будет $x \geq 8{,}2$. А так как x – натуральное, то

$$x \geq 9.$$

Итак, должно быть не менее 9 световых окон. Следовательно, количество яблонь не больше, чем $69 - 9 = 60$. Утверждение доказано.

Ответ: наибольшее количество яблонь равно 60.