ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 класс

Решения задач

10.1. Обозначим эти числа A и B. Пусть B – наименьшее из этих чисел. Тогда большее число $A = 10B + n$, где n - зачеркнутая цифра, и

$0 \le n \le 9$. По условию $A + B = 11B + n = 2022$. Значит, n является остатком от деления 2022 на 11, получаем $n = 9$. Получаем $B = 183$, $A = 1839$.

Ответ: $B = 183$, $A = 1839$.

10.2. Пусть v_1 – скорость пешехода, вышедшего из города A, а v_2 – скорость пешехода, вышедшего из города B. До момента встречи первый пешеход провел в пути 4 часа и прошел путь $S_1 = 4 v_1$, а второй провел в пути 2 часа и прошел путь $S_2 = 2 v_2$. После этого второй пешеход за 2 часа дошел до города A, то есть прошел путь S_1. Получаем уравнение $2v_2 = S_1$ или $2v_2 = 4v_1$. Отсюда находим $v_2 = 2v_1$.

Пусть t - это время, за которое первый пешеход дошел от места встречи до города B, то есть проделал путь S_2. Получаем уравнение $tv_1 = S_2$ или $tv_1 = 2 v_2$. Подставляя в это уравнение $v_2 = 2v_1$, получаем $tv_1 = 4 v_1$.

Отсюда находим $t = 4$. Добавляя это время ко времени встречи, получаем 17 часов – время, в которое первый пешеход пришел в город B.

Ответ: 17 часов.

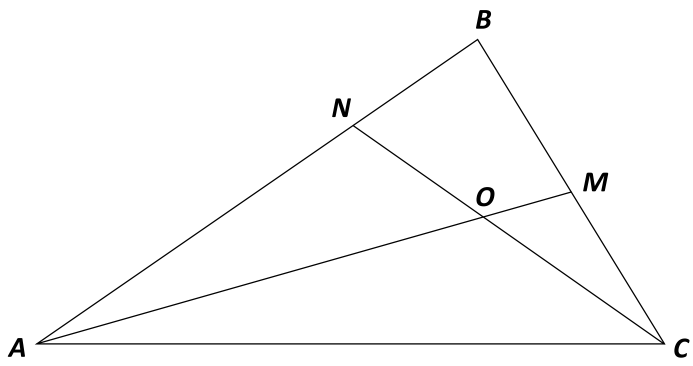
10.3. Допустим, что данные уравнения имеют общий корень x_0. Вычтем из равенства $x^4 + bx + c = 0$ равенство $x^4 + ax + d = 0$. Получим

$(b – a)x_0 = d – c$. Так как по условию $b > a$, $d > c$, то $b – a > 0$, $d – c > 0$.

Поэтому $x_0 > 0$. Но положительное число быть корнем многочлена, имеющего все положительные коэффициенты, не может. Значит, данные уравнения не могут иметь общих корней.

Ответ: не могут.

10.4. В треугольнике ABC $BC : AC = 1 : 3$, AM – медиана, CN – биссектриса угла C, точка O – точка пересечения медианы и биссектрисы.



Так как CN – биссектриса, то AN : NB = AC : BC = 3 : 1 = $\frac{S_{\Delta CAN}}{S_{\Delta CNB}}$, поэтому S_{ABC} = $4S_{CNB}$, $S_{ANC} = 3S_{CNB}$; $S_{ANC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$. С другой стороны, $S_{ANC} = S_{ANO} + S_{AOC}$.

Выразим S_{AOC}:

$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta COM}} = \frac{AC}{CM} = \frac{6}{1}$, $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$ $\longrightarrow$ $S_{\Delta AMC} = 7\,S_{\Delta COM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

$\longrightarrow$ $S_{\Delta COM} = \frac{1}{14}S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta AOC} = 6\,S_{\Delta COM} = \frac{6}{14}S_{\Delta ABC} = \frac{3}{7}S_{\Delta ABC}$.

Тогда $S_{\Delta ANO} + S_{\Delta AOC} = S_{\Delta ANO} + \frac{3}{7}S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ANC} = \frac{3}{4}S_{\Delta ABC}$.

Отсюда получаем:

$S_{\Delta ANO} = \frac{3}{4}S_{\Delta ABC} - \frac{3}{7}S_{\Delta ABC} = \frac{9}{28}S_{\Delta ABC}$ $\longrightarrow$ $S_{\Delta ANO} : S_{\Delta ABC} = 9 : 28$.

Ответ: 9 : 28.

10.5. Рассмотрим линии разреза, образующиеся в исходном квадрате 100 х 100. Легко убедиться, что одно разрезание сложенного квадрата соответствует разрезанию исходного квадрата по нескольким параллельным линиям, причем расстояния между этими линиями не меньше 2 (так как между любыми линиями разреза должна проходить хотя бы одна линия сгиба). Значит, таких линий не больше 50, и они разбивают квадрат на не более чем 51 прямоугольник. При двух таких разрезаниях образуется самое большее $51^2 = 2601$ часть, так как каждый прямоугольник первого разбиения распадается при втором на не более чем 51 часть. Пример с 2601 частью можно получить, сложив квадрат так, чтобы линии сгиба образовывали сетку квадрата 2 х 2, а затем разрезать получившийся после складываний квадрат 2 х 2 по двум его средним линиям.

Ответ: 2601